

“不，我不在數學課堂運用數學史。為什麼？”

蕭文強

香港大學數學系

1. 引言

一九九八年四月，在法國南部小鎮 Luminy 召開了第十屆國際數學教學委員會專題研究 (10th ICMI Study) 的工作會議，主題是“數學史在數學教育的作用”。在會上我作了一個講演，當中我列舉了十三項理由，說明為什麼教師在課堂上對運用數學史有所遲疑，甚且決定不採用。提出這些理由時，我是故意唱反調。往後幾年，我把理由加至十五項，其後再增至十六項：最後一項是從數學教育學者的角度提出，前十五項則從教師角度著眼。我多次與現職教師及準教師討論這十六項理由，搜集他們的意見。隨著時間過去並經過多次與教師們談話，我愈來愈明白到不能老是停留在一個表面是唱反調，心底裡卻是一個熱心支持 HPM (History and Pedagogy of Mathematics, 數學史與數學教學) 的人。要是這樣，每當遇到挑戰時，便會馬上進行反擊，為 HPM 作辯護。我們不應該心存先入為主的成見，而應該真正走進教師群中，以開放的態度，聆聽他們細說課堂的經歷。

為了更生動地表達這十六項理由，我用問題或感嘆句形式把它們寫出來，就像是發自教師的內心。細心思考這些理由是一項非常有益的活動，能幫助我們看得更清楚，做得更好；至低限度，當我們嘗試把數學史與數學的學習結合時，它能幫助我們建立更穩固的立足點。南宋儒家學者朱熹 (1130-1200) 教導我們：「人之病，只知他人之說可疑，而不知己說之可疑。試用詰難他人者以自詰難，庶幾自見得失。」

2. 十六項使人不運用數學史於教學的理由

以下是我的假設：

- (1) 我沒有這麼多上課時間！

- (2) 這些並不是數學！
- (3) 即使我講了，怎樣考試？
- (4) 這不能改善學生成績！
- (5) 學生不喜歡數學史！
- (6) 學生認為那是歷史，他們討厭歷史課！
- (7) 學生覺得數學史和數學一樣沉悶！
- (8) 學生缺乏普遍文化知識，難以真正欣賞數學史！
- (9) 數學發展是要把五花八門的問題化為系統處理的例行操作，為何回到起初的混沌呢？
- (10) 很缺乏數學史的教學材料！
- (11) 很缺乏數學史的教師培訓！
- (12) 我不是數學史專家，怎樣判斷聽來的材料是否可靠的？
- (13) 真正歷史發展過程往往迂迴曲折，依照着去敘述不只說不清楚，反而引起混亂！
- (14) 閱讀原典十分困難，真的有助嗎？
- (15) 會不會引發“文化沙文主義”和狹隘的“民族主義”呢？
- (16) 有沒有實際數據證明在數學課堂運用數學史能提高學生成績呢？

3 · 在課堂上運用數學史的研究

已經有很多文章論及數學史在數學的學習和教學上的價值和作用，它們的數量遠遠超越那些測試這種說法的文章。第一類文章，讀者可參考 (Fauvel & van Maanen 2000 · Furinghetti & Radford 2002 · Furinghetti 2004) 和它們所刊載的參考文獻。第二類文章有 (Fraser & Koop 1978 · Guilikers & Blom 2001 · Lit & Siu & Wong 2001 · McBride & Rollins 1977 · Philippou & Christou 1998) ，但不表示這已包括所有相關的文獻。本文只集中敘述其中一篇 (Lit & Siu & Wong 2001) ，只因為作者較熟悉那一篇吧。

文章 (Lit & Siu & Wong 2001) 所記錄的實驗在一九九七年十一月進行，為期三週，每週上三至四節課，主題是「勾股定理」(亦稱「畢氏定理」)。實驗組採用的材料富有數學史特色，相應組的教學程序與實驗組無異，只是去掉數學史成份。測試結果顯示相應組學生的熱心程度下降，而實驗組學生的則輕微上升。至於傳統測

驗分數，實驗組一般較相應組的為低。從表面看來，這些結果加強了這個意見：數學史能令學生上課時較愉快，但卻不能令他們學到什麼。本文最後一節將再討論這一點。現在，我要講述有關這項實驗在一九九六年十月進行的事前試點研究，因為它揭露一些有趣的現象。

試點研究以兩部份進行。第一部份由數學教師參與：從四十一間學校選出三百六十位教師，當中 82% 回答了問卷（其中 45% 是少於五年教學經驗的“新教師”，其餘 55% 是有五年或以上經驗的“熟練教師”）。他們以 1 至 5 分評估數學史的價值（1 分是毫無價值，5 分是非常有價值），這是指數 A。另外，他們以 1 至 5 分顯示他們在課堂運用數學史的經常程度（1 分是從不運用，5 分是經常運用），這是指數 B。表 1、2、3 列出所得的分類結果。

| | 教師曾選修數學史(19.2%) | 教師不曾選修數學史(80.8%) |
|---|-----------------|------------------|
| A | 3.99 | 3.78 |
| B | 1.64 | 1.44 |

表 1

| | 教師曾閱讀數學史書籍 (56.9%) | 教師不曾閱讀數學史書籍(43.1%) |
|---|-----------------------|--------------------|
| A | 3.98 | 3.61 |
| B | 1.62 | 1.29 |

表 2

| | 教師曾閱讀有關數學史應用於 數學教學的文章(25.0%) | 教師不曾閱讀有關數學史應用 於數學教學的文章(75.0%) |
|---|---------------------------------|----------------------------------|
| A | 4.07 | 3.73 |
| B | 1.78 | 1.37 |

表 3

從這些數據得到的結論十分明顯：教師非常看重數學史的價值，但真正在課堂上運用數學史的主動性卻非常低！不過，對 HPM 的支持者來說是一種鼓勵，因為通過不斷游說，教師在課堂上運用數學史的意識和主動性大大提高。(如果讀者對“運用”一詞感到不自在，請忍耐一下，文章結尾時我再談及這一點。)

試點研究的第二部份由兩班初中二年級學生參與，每班四十二人(年約十三歲)，實驗員在兩班教授「勾股定理」。其中一班學生的學習能力較高，稱之為“強班”，另一班學生的學習能力較低，稱之為“弱班”。要鄭重說明，這種區分純粹按照學生的考試成績釐定，我個人認為，它不能全面反映學生的一般興趣和能力。表 4 列出分類結果。

| | “強班” | “弱班” |
|-----------------------|----------|-----------|
| 喜歡課堂加入數學史材料的學生人數 | 14 (4) | 30 (25) |
| 對課堂是否加入數學史材料沒有意見的學生人數 | 16 (9) | 1 (0) |
| 不喜歡課堂加入數學史材料的學生人數 | 12 (9) | 11 (7) |

括號內的學生人數 = 認為運用了數學史的數學課比以前更有趣味和更有意義

表 4

從這些數據得到的結論又是明顯不過：那些“能力較高”的學生一般認為數學史沒有用處和浪費時間，而“能力較差”的學生則持相反意見。(個人認為)這個現象說明目前香港的數學教育的缺點，學生全部注意力集中在計算技巧以至操練考試，因而忽略了長遠和深入的理解。

這次試點研究促使我草擬了十五項數學教師不在數學課堂運用數學史的理由，並通過與教師討論，搜集他們的意見。

4 · 教師的意見

作者曾向幾組在職教師及準教師搜集他們對這十五項理由的意見，項 (16) 只作討論用，並不要求他們表示同意抑或不同意。至目前收集了六百零八份回應。表 5 列出結果。把意見按教師教學經驗分類，雖然有自身的研究價值，但本文旨在討論教師的總體意見，這些結果就不在本文分別列出了。

| | 非常不同意 (人數%) | 不同意 (人數%) | 沒有意見 (人數%) | 同意 (人數%) | 非常同意 (人數%) |
|------|----------------|--------------|---------------|-------------|---------------|
| (1) | 3.95 | 20.07 | 9.04 | 49.51 | 17.43 |
| (2) | 45.06 | 42.43 | 7.57 | 3.13 | 1.81 |
| (3) | 9.54 | 27.80 | 29.27 | 29.11 | 4.28 |
| (4) | 5.60 | 35.36 | 29.11 | 25.00 | 4.93 |
| (5) | 9.87 | 46.38 | 27.80 | 13.65 | 2.30 |
| (6) | 8.88 | 44.24 | 28.46 | 17.11 | 1.31 |
| (7) | 7.57 | 42.44 | 24.34 | 24.01 | 1.64 |
| (8) | 5.59 | 28.95 | 19.24 | 39.31 | 6.91 |
| (9) | 18.91 | 49.51 | 21.55 | 8.88 | 1.15 |
| (10) | 4.61 | 20.73 | 10.19 | 45.56 | 18.91 |
| (11) | 1.65 | 6.25 | 9.21 | 55.26 | 27.63 |
| (12) | 4.11 | 31.25 | 24.67 | 33.22 | 6.75 |
| (13) | 4.44 | 38.65 | 28.78 | 24.51 | 3.62 |
| (14) | 1.97 | 17.76 | 32.08 | 41.94 | 6.25 |
| (15) | 10.85 | 32.56 | 47.54 | 7.41 | 1.64 |

表 5

作者無意聲稱在搜集和處理數據時採用了嚴謹的科學方法。雖然如此，這些數據仍然或多或少代表了教師的意見。項目（1）、（8）、（10）、（11）、（12）、（14）搜集得來的結果，完全是意料之內。雖然如此，從 HPM 的角度來看，這些是最值得我們注意的。下一節將詳細討論這些調查結果，以下是其概括。

- 一、53%教師認為上課時間不足是一大問題——“我知道數學史是好東西，不過我沒有時間運用它，因為連要完成課程的時間也不足夠。”
- 二、50%教師對搜集學習材料有困難。78%老師認為師範課程缺乏培訓如何在教學上運用數學史。

- 三、 50%教師對閱讀原典有困難。36%教師擔憂「以訛傳訛」——“歷史上發生的事情是否真的如此？”
- 四、 36%教師同意學生的普遍文化知識不夠，未足以使他們欣賞數學史。

5 · 三個例子

首先要解釋一下經常被誤解的所謂“在數學課堂中運用數學史”。運用數學史並不等於只是提一下年份日期、人物名字，或張貼一些大數學家的肖像，也不是把數學史作為一個科目去教授。誠然，以上所說的，沒有一樣是需要摒棄的，更加不是無用的，而且數學史本身是一門嚴肅有價值的學問。明白這一點已經可以消除由那十六項感嘆句和問題顯示的困惑和疑慮，特別是項（1）。

早在一九一九年，（英國）數學會委員會報告書提出以下建議（Fauvel 1991，頁3）：「學童應掌握數學科中較人性方面的知識。...數學史能幫助我們製定數學科的課程。...〔建議〕課室懸掛數學家肖像；上課時教師經常提及數學家的生平和他們的研究，並解釋數學的發現對文化進展的影響。」這些建議都是正確的，但只是第一步。

在這方面，我們應當聽從 Frederick Raphael Jevons 的忠告（Jevons 1969，165 頁）：「事實說明科學史可以有如其他學科同樣地沉悶、過時和無用。...如果課程只是從古希臘至達爾文（Darwin）匆匆走一回，臚列其間在科學上發生的主要事件和日期，那麼，它的教育價值比起要求學生熟讀英國歷代皇朝的年份沒有任何分別。」（Jevons 所說的是科學教學，以“數學”代替“科學”，此句也用得上。）Jevons 也曾說過（Jevons 1969，42 頁）：「〔在講課中〕胡亂加入歷史不比完全沒加入為佳。...很多時這些內容並非基於第一手的歷史研究，只是拋出一些顯赫的名字，或者說一點掌故和軼事，這些掌故和軼事又往往因其浪漫成份多於其真確實情被選上。初學者不會理會這些東西，懂得歷史的人則會感到不快。」

Jevons 的第二段說話表達了項（12）提出的疑慮。對於這個疑慮我的第一個反應是（Siu 1997/2000）：「運用掌故和軼事的時候，我們通常不理會它們是否真確。有人會覺得奇怪，在別の場合數學家以嚴謹見稱，但他們竟然毫不猶豫重複一些沒有歷史根據的掌故和軼事，沒有半點“良心不安”。但是要明白，這些只是被視為

故事而非歷史，只要我們著重它們的催化作用，它們跟用寓意辯論 (heuristic argument) 來解釋定理同樣沒有問題。此外，雖然很多故事在長年累月中已經不斷被修改，其中不少是基於事實的。當然，最理想的情況是找到既真實又有趣又富啟發的故事，若不然，一樁能帶出主旨的故事仍然對教學有幫助。」在文章 (Siu 1997/2000，頁 4) 我提供了兩樁我喜愛並且在課堂中運用過的軼事。

當要處理數學理念發展時，一個更嚴肅的問題隨之而生，它與項 (9)、項 (12)、項 (13) 與項 (14) 有關。在這方面我極受 Ivor Gratten-Guinness 的文章 (Ivor Gratten-Guinness 2004) 啟發。我將以下面的三個例子說明我的理解。

第一個例子是關於函數的概念。從 John Mason 那兒我學到如何在微積分課上提出以下 (按次序) 問題的“招數”：(1) 繪畫一個函數的圖像；(2) 繪畫一個連續函數的圖像；(3) 繪畫一個可微函數的圖像。過程中，問題 (2) 後我加插 (2')：你給予 (1) 的答案是否已回答了 (2) 呢？問題 (3) 後我加插 (3')：你給予 (2) 的答案是否已回答了 (3) 呢？很大可能學生給予問題 (1) 的答案已解決了問題 (2) 和問題 (3)！這樣的過程提醒我們函數的細緻特性並不是十分自然的。只有在碰上困難並要正視它們時，才能真正完全了解這些特性。

雖然我並非主張學生要追隨數學家幾百年走過的路程，但是歷史能提供很好的引導。函數概念的發展史在學習函數過程中擔當一個角色，一如 Gaston Bachelard 所說 (Bachelard 1938，第 2 章，段 II)：「認識論學者的工作與科學史家的工作的分別是：科學史家把概念 (ideas) 看作為事實 (facts)，而認識論學者則把事實與概念置於一個完整的思想體系中。一項事實，在某個時代還未能好好地被理解，對科學史家來說，它仍然是一項事實，但對認識論學者來說，它是一個障礙 (obstacle)，一種「反思想」 (counter-thought)。」文章 (Siu 1995a) 詳細討論了以歷史觀點教授函數的過程。

第二個例子是關於解難的問題。在講解 Königsberg 七橋問題時，我喜歡借助 Leonhard Euler 的智慧。一七三五年八月二十六日，Euler 在 St Petersburg 宣讀了題為 *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* 的文章；閱讀這篇文章，我們能學懂很多東西。把 Euler 的解法與現代圖論教科書所提供的作一比較，是一項有益有啟發的活動。這個例子的細節刊於 (Siu 1995b)。

以這樣的方法教授 Eulerian graph 需要的時間必然較多，但時間是用得其所的。除了學懂 Eulerian graph 的結果外，我們還能看到一個圖的頂點的價 (degree) 這個概念是怎樣產生，並知道它是怎樣發展成為今天我們在標準教科書見到的樣式。現代教科書給 Eulerian graph 定理的證明來得淺易、簡明和完整，乃後見之明。Euler 最初給出的證明雖然不如現代證明那麼完整和精鍊，但它以清晰程度及豐富內容取勝。並且，閱讀 Euler 這篇原文是一件賞心樂事；它的英文譯本可以在多處找到，例如 (Biggs & Lloyd & Wilson 1976, 1-8。)

第三個例子是關於圓形的面積。所有小學生都懂得以 R 為半徑的圓的面積是 πR^2 ，其中 π 是圓周與直徑的比率。愛思考的學生可能想知道面積的公式是怎樣得來的？他不難接受圓周是直徑乘以一個常數 (叫它做 π)，因為圓形越“闊”，它的圓周便相對地“增大”；但是，為什麼同一比例常數會出現於圓面積的公式呢？數學史能夠提供不少以寓意論證求圓面積公式的解說 (往後加上極限的概念便成為正確的數學證明)。例如，公元前三世紀亞基米德在《圓的量度》提出的 (Calinger 1982/1995, 35 段) (見圖 6)，公元三世紀劉徽在《九章算術》注疏提出的 (Crossley & Lun & Shen 1999, Chapter 1) (見圖 7)，又或者是 Abraham bar Hiyya ha-Nasi 在公元十二世紀的《量度論》提出的 (Grattan-Guinness 1997, Chapter 3, Section 9) (見圖 8)。

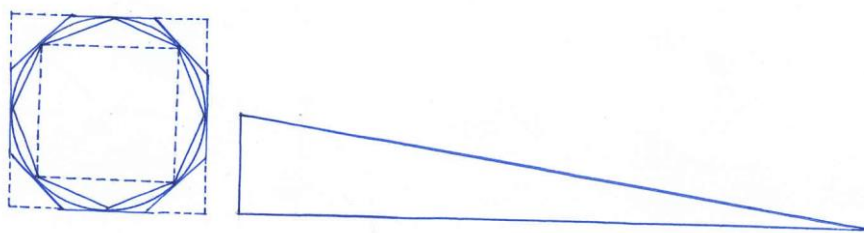


圖 6

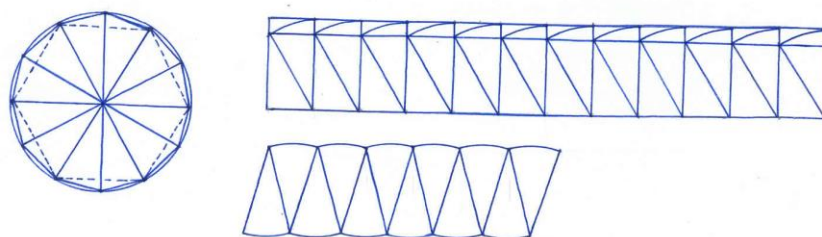


圖 7

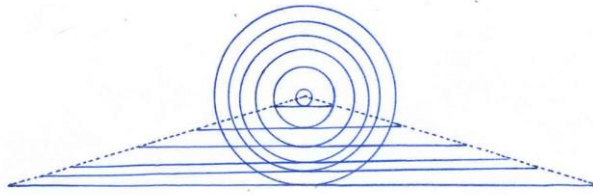


圖 8

這些圖都能導出（用今天數學表達的）圓面積公式 $A = \frac{1}{2}CR$ ，亦即是 $A = \pi R^2$ 。記錄在上述文獻的工作便是歷史。

在某方面來說，公式 $A = \frac{1}{2}CR$ 比 $A = \pi R^2$ 優勝，因為它顯示了一件非常重要的事實，那就是圓面積的二維性質與周長的一維性質非常相關。更一般來說，有界閉域的面積與其周界上某一數量有聯系。這項性質令人想起「微積分基本定理」所敘述的漂亮關係。事實上，「微積分基本定理」的一般形式——Stokes' 定理——在平面上便是 Green' s 定理。Green' s 定理說：在某適定條件底下，單閉曲線 C 上面的積分

$\oint_C p dx + q dy$ 相等於區域 A 上的二重積分 $\iint_A \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dx dy$ ，A 是由 C 圍成的區域。取 C

作圓 $x^2 + y^2 = R^2$ ，又取 $p = -y, q = x$ ，便得到公式

$$A = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx = \frac{1}{2} \oint_C (-y, x) \cdot \left(-\frac{y}{R}, \frac{x}{R} \right) dl = \frac{R}{2} \oint_C dl = \frac{1}{2} CR \quad (\text{見圖 9})。$$

這種討論便是傳承。

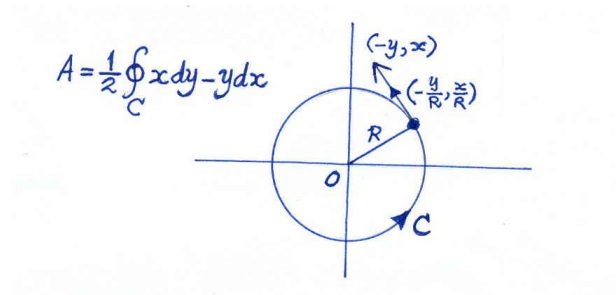


圖 9

在文章 (Grattan-Guinness 2004, 頁 1) Ivor Grattan-Guinness 說：「歷史和傳承都是處理過去數學的正當方法，但把二者混為一談，或者認定其中之一從屬於另一，那就不正確了。」他的結論是：「應用前人的數學成果過程中，數學史與傳承有著本質的不同；在數學教學過程中，兩者都有益處。」

能在課堂運用的數學史材料越來越多了，除了文章 (Fauvel & van Maanen 2000, Siu 1997/2000) 文末附的參考書目外，最近還有一套包括不同題材的獨立單元，以光碟版本發行 (Katz & Michalowicz 2005)。

6. 結論

如果完全不提第 (16) 項，那就對 HPM 不公平。不幸的是，這方面的證據雖然被視為運用數學史的試金石，但得到的數據不多而且不一定正面。在我所知道的幾項研究中，能取得正面結果的，多在於情感範疇而不在於認知範疇。學生上了加進數學史素材的數學課後，比較從前喜歡數學科，但是他們的測驗成績不一定有改進。有人爭辯說，這種情況是因為測試的與所學所教的並不一致。儘管如此，我們不能否認，加添了數學史的數學課未必能令學生學得更好。

就算教師在數學課運用了數學史後，學生的興趣與成績都有所提高，也不能肯定變化是因為教師運用了數學史，還是因為教師熱心教學。令人安慰的是，有跡象顯示熱心教學的教師與願意運用數學史的教師明顯地有相關。我並沒有科學數據支持這項聲稱，只是與教師多次接觸時得到的印象。不過，如果教育真的是一項學習者與教學者相互依賴的活動，那麼，與教師接觸得到的資料，其用處與大型統計數據媲美，甚至比這些數據更為有用。

更基本的問題是，學生在某個課題的測驗成績有沒有進步是否真的那麼重要？當然成績進步是重要的，但是否**真的是**那麼重要呢？量度數學史作為教學工具的有效性是十分困難，測驗中取得高分數既非是說明數學史有效的必須條件，亦非是充份條件。有些作用長期地影響一個人的成長，但評估一個人的成長是困難的，也無此需要。

「在數學課堂中運用數學史，不能在一夜之間提高學生的成績，但能夠使學習數學成為一種有意義而且活潑的經驗，（希望由此）令學習進行得較順利和更深入。明白了數學的演進過程，教師在教學中會更加耐心，較少專橫，更富厚道，較少迂腐；教師更能反思，更熱衷於學習，視教學為一項對知識和思想的承擔。」（Siu 1997/2000，頁 8）

「最後，我們要指出，雖然數學史是非常重要的，但不能視之為解決數學教育中眾多問題的萬應靈丹，如同數學是一門非常重要但不是唯一值得學習的科目。其實，正是數學與別的知識和文化領域之間的和諧結合，使它更值得我們學習。在這方面，數學史在全人教育上，擔當了一項更加重要的任務。」（Siu & Tzankis 2004，p.ix）

回到這篇文章的題目——不，我不在數學課堂運用數學史。為什麼？——我現在可以回答了：「不，我不在數學課堂運用數學史，我讓數學史充滿數學課。」

參考書目

- Bachelard, G., 1938, *La formation de l' esprit scientifique*, Paris : J. Vrin.
- Biggs, N.L., Lloyd, E.K., Wilson, R.J., 1976, *Graph Theory 1736-1936*, Oxford: Clarendon Press.
- Calinger, R. (ed.), 1982/1995, *Classics of Mathematics*, Oak Park: Moore; reprinted edition, Englewood: Prentice Hall.
- Crossley, J.N., Lun, A.W.C., Shen, K., 1999, *The Nine Chapters on the Mathematical Art: Companion and Commentary*, Oxford: Oxford University Press.
- Fauvel, J., 1991, "Using history in mathematics education" , *For the Learning of Mathematics*, **11(2)**, 3-6.
- Fauvel, J., van Maanen, J. (eds.), 2000, *History in Mathematics Education : The ICMI Study*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Fraser, B.J., Koop, A.J., 1978, "Teachers' opinion about some teaching material involving history of mathematics" , *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, **9(2)**, 147-151.

- Furinghetti, F., 2004, "History and mathematics education: A look around the world with particular reference to Italy" , *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, **3(1-2)**, 1-20.
- Furinghetti, F., Radford, L., 2002, "Historical conceptual developments and the teaching of mathematics: From phylogenesis and ontogenesis theory to classroom practice" , in L.D. English (ed.) *Handbook of International Research in Mathematics Education*, London: Lawrence Erlbaum .631-654.
- Grattan-Guinness, I., 1997, *The Fontana History of the Mathematical Sciences: The Rainbow of Mathematics*, London: Fontana Press.
- Grattan-Guinness, I., 2004, "History or heritage? An important distinction in mathematics and for mathematics education" , *American Mathematical Monthly*, **111**, 1-11.
- Guilikers, I., Blom, K., 2001, " 'A historical angle' , a survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education" , *Educational Studies in Mathematics*, **47**, 223-258.
- Jevons, F.R., 1969, *The Teaching of Science: Education, Science and Society*, London: Allen & Unwin.
- Katz, V., Michalowicz, K.D. (eds.), 2005, *Historical Modules for Teaching and Learning of Mathematics* (CD version), Washington D.C.: Mathematical Association of America.
- Lit, C.K., Siu, M.K., Wong, N.Y., 2001, "The use of history in the teaching of mathematics: Theory, practice and evaluation of effectiveness" , *Educational Journal*, **29(1)**, 17-31.
- McBride, C.C., Rollins, J.H., 1977, "The effects of history of mathematics on attitudes towards mathematics of college algebra students" , *Journal for Research in Mathematics Education*, **8(1)**, 57-61.
- Philippou, G.N., Christou, C., 1998, "The effects of a preparatory mathematics program in changing prospective teachers' attitude towards mathematics" , *Educational Studies in Mathematics*, **35**, 189-206.
- Siu, M.K., 1995a, "Concept of function – Its history and teaching" , in F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Johansson, V. Katz (eds.) *Learn From the Masters: Proceedings of Workshop on History of Mathematics at Kristiansand in*

August 1988, Washington D.C.: Mathematical Association of America, 105-121.

- Siu, M.K., 1995b, "Mathematical thinking and history of mathematics" , in F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Johansson, V. Katz (eds.) *Learn From the Masters: Proceedings of Workshop on History of Mathematics at Kristiansand in August 1988*, Washington D.C.: Mathematical Association of America, 279-282.
- Siu, M.K., 1997/2000, "The ABCD of using history of mathematics in the (undergraduate) classroom" , *Bulletin of the Hong Kong Mathematical Society*, **1**, 143-154; reprinted in V. Katz (ed.) *Using History To Teach Mathematics: An International Perspective*, Washington D.C.: Mathematical Association of America, 3-9.
- Siu, M.K., Tzanakis, C., 2004, "History of mathematics in classroom teaching – Appetizer? main course? or dessert?" , *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, **3(1-2)**, v-x.
- Zhu, X., 1992, *Zhu Zi Xing Li Yu Lei* (Conversations of Master Zhu on Nature and Principle Arranged Topically), reprinted version, Shanghai: Shanghai Classical Texts Publishers.

[這篇是 2004 年 7 月在瑞典 Uppsala 市舉行的 HPM 2004 & ESU4 上的英語講演 · 文稿刊於 *Proceedings of HPM2004 & ESU4 at Uppsala* (由 F. Furinghetti 等編, 2006 年) , 268-277 頁。本文由作者及陳鳳潔合譯 · 載於蕭文強:《心中有數》, 九章出版社, 2009 年 · 120-135; 大連理工大學出版社 · 2010 年 · 155-173。]